Andreas Dierks
dierks@web.de

Siegfried Weiß
siegfried.weiss@gmx.de

Zentralabitur 2011
Schwerpunkt Lineare Algebra

Material zum Workshop am 24.2.2010 in der Marienschule Hildesheim

Inhalt:

1 Rahmenbedingungen

Für das Zentralabitur Mathematik 2011 für allgemeinbildende Schulen muss im Bereich Lineare Algebra/Analytische Geometrie neben analytischer Geometrie das Thema „Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen“ unterrichtet werden.
In den veröffentlichten Hinweisen zu den thematischen Schwerpunkten werden als grundlegende Themen genannt:

- Rechnen mit Matrizen
- Beschreibung von Prozessen mithilfe von Matrizen
- Darstellung und Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum (Parameterformen der Geraden- und Ebenen-Gleichungen genügen)

Als thematische Schwerpunkte werden angegeben
für Kurse mit grundlegendem Anforderungsniveau:

- Matrizen im Anwendungsbezug: Materialverflechtung (Verflechtungsdiagramme, Verflechtungsmatrizen)

für Kurse mit erhöhtem Anforderungsniveau:

- Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen
- Populationsentwicklung, Käufer- und Wahlverhalten, zyklisches und stationäres Verhalten

Zum 1.8.2010 tritt das Kerncurriculum Mathematik Sekundarstufe II in Kraft. Darin befindet sich ebenfalls der Lernbereich: Mehrstufige Prozesse – Matrizenrechnung.

Für das Fachgymnasium Wirtschaft war das Thema „Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen“ bereits in den Jahren 2006 bis 2009 verbindlich. Mehrfach war Materialverflechtung thematischer Schwerpunkt.

2 Matrizen bei linearen Gleichungssystemen

Immer wieder sind bei Aufgaben aus dem Bereich der analytischen Geometrie lineare Gleichungssysteme auf ihre Lösbarkeit zu untersuchen und wenn möglich zu lösen. Dies trifft besonders zu, wenn nur Parameterformen von Geraden und Ebenen benutzt werden. Bei der Arbeit mit linearen Gleichungssystemen können Matrizen mit Gewinn eingesetzt werden, zumal die Funktionen *ref* und *rref*, die bisher schon für Rechner von TI und Computer-Algebra-Systeme von Casio zur Verfügung standen, jetzt auch für Casio-Graphikrechner zur Verfügung stehen und für die Abiturprüfung zugelassen sind (Erlass vom 9.6.2008).
Mittels der Funktion *ref* wird eine Matrix in die „Dreiecks-“ oder „**Zeilenstaffelform**“ (engl. „row echelon form“) gebracht, mittels *rref* wird in die „Diagonalenform“ oder „**reduzierte Zeilenstaffelform**“ (engl. „reduced row echelon form“) umgewandelt. Ein einfaches Beispiel, das leicht auch händisch bearbeitet werden kann, soll dies deutlich machen.

Gegeben sind die Geraden $g_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_2: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Offensichtlich sind sie nicht parallel oder identisch. Schneiden sie sich?

Gleichsetzen ergibt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Hier ist fast auf den ersten Blick erkennbar, dass die Gleichung keine Lösungen hat.
Diese einfache Gleichung soll benutzt werden, um das Gaußsche Eliminationsverfahren in Erinnerung zu rufen (oder den Schülerinnen und Schülern vorzustellen) und die Wirkung von *ref* und *rref* darzustellen.

Die Gleichung wird umgeformt zu: $t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 0t - 2s = -1 \\ 2t - 4s = -5 \\ 2t + 0s = -1 \end{matrix} \right|$

Für die Lösung mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens notieren wir nur die Koeffizienten in einer Koeffizientenmatrix:	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Wir wenden die bekannten Äquivalenzumformungen an. Vertauschen der ersten beiden Zeilen und Division der dann ersten Zeile durch 2 ergibt:	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2{,}5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Das Doppelte der ersten Zeile wird von der Dritten subtrahiert.	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2{,}5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
Die zweite Zeile wird durch -2 dividiert.	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2{,}5 \\ 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Das Vierfache der zweiten Zeile wird von der Dritten subtrahiert. Man sieht hier schon an der dritten Zeile, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist: $0 \cdot t + 0 \cdot s$ kann nie 2 ergeben. Wir rechnen dennoch weiter.	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2{,}5 \\ 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
Die dritte Zeile wird durch 2 dividiert.	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2{,}5 \\ 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Wendet man *ref* auf die Ausgangsmatrix an, so erhält man die nebenstehende Matrix. Offensichtlich wurde die Hälfte der dritten Zeile von der zweiten subtrahiert.	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2{,}5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Durch Subtraktion der dritten von der zweiten Zeile erhält man:	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Durch weitere Subtraktionen erhält man schließlich: Dies ist die Matrix, die man mittels der Funktion *rref* erhält. Auch hier ruft man sich für die Interpretation die Bedeutung der Koeffizienten in Erinnerung. In der letzten Zeile liest man: $0 \cdot t + 0 \cdot s = 1$. Diese Bedingung ist nicht erfüllbar. Das Gleichungssystem hat keine Lösung. Somit schneiden sich die Geraden nicht.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Übung

Entwickeln Sie typische Aufgaben der Analytischen Geometrie, die sich mit Hilfe von Gleichungssystemen lösen lassen. Untersuchen Sie: Wie wirken sich besondere Lagebeziehungen auf die Diagonalform der Koeffizientenmatrix aus?

alternativ:

Ermitteln Sie Lage der Geraden g zu den beiden Ebenen E_1 und E_2. Zeigen Sie, dass sich die beiden Ebenen schneiden und bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Arbeiten Sie mit Hilfe von Gleichungssystemen und den Funktionen *ref* oder *rref*.

3 Einstieg in das Thema Materialverflechtung

Die Schülerinnen und Schüler können in einem Gruppenpuzzle die wesentlichen Grundlagen selbst erarbeiten. Dieser Einstieg eignet sich vor allem für Kurse auf grundlegendem Niveau.

Hinweise zu den Arbeitsphasen:

I. Arbeit in der Stammgruppe

Es liegen Einstiegsaufgaben zu drei Kontexten vor (s.u.):

A) Kuchenproduktion
B) Modelleisenbahn
C) Bauvorhaben.

Zunächst werden Stammgruppen mit jeweils 3 Schülern gebildet. Jeder Schüler der Stammgruppe erhält eine andere Einstiegsaufgabe. Diese bearbeitet er in Einzelarbeit (Zeitbedarf: ca. 10 Minuten).

II. Bildung von Expertengruppen und Arbeit in der Expertengruppe

Die Gruppen bearbeiten die Aufgabe Nr. 2

III. Austausch und Weiterarbeit in der Stammgruppe

Die Schüler stellen sich in der ursprünglichen Stammgruppe ihre Ergebnisse mit und bearbeiten Aufgabe 3.

IV. weiteres Vorgehen im Unterricht

Im weiteren Unterricht sollte die Matrizenschreibweise eingeführt werden, die Matrizenmultiplikation definiert und mit dem Rechner realisiert werden.
Man beachte: Bei der Matrizenschreibweise sind grundsätzlich 2 Anordnungen von Input und Output möglich, da die Gleichungen $C = A \bullet B$ und $C^T = B^T \bullet A^T$ äquivalent sind. Die hier vorgegebenen Tabellen führen zu einer einheitlichen Anordnung. Diese findet sich auch in der Mehrzahl der Schulbücher.

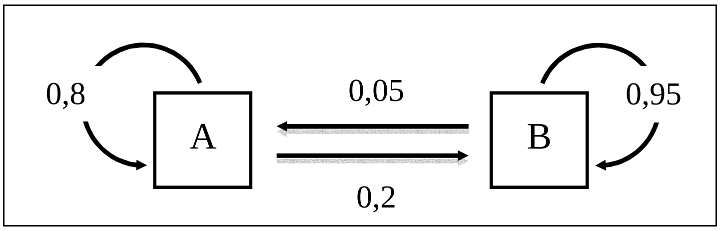
4 Übergangsmatrizen

4.1 Aufgabenbeispiel: Käuferverhalten

Ein Marktforschungsinstitut ermittelte mit Hilfe statistischer Untersuchungen das Kaufverhalten für zwei Zeitungen *Allgemeine Zeitung* und *Neues Blatt*. Insbesondere interessierte dabei das Verhalten der Wechselkäufer.
Zu Beginn der Befragung kauften von den 5000 befragten Personen 2000 die *Allgemeine Zeitung* und 3000 das *Neue Blatt*. Nach einer Woche hatten 20% von der *Allgemeinen* zum *Blatt* und 5% vom *Blatt* zur *Allgemeinen* gewechselt.

Hinweise zur Lösung:

Die im Text gegebenen Informationen lassen sich in einem Übergangsgraphen gut veranschaulichen.



Durchführung mit dem Casio fx 9750G/ cfx9850G:

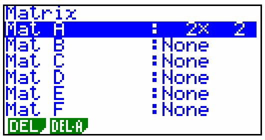
Die Übergangstabelle legt eine Beschreibung der Situation durch eine Übergangsmatrix nahe.

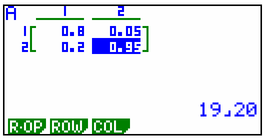
	von A	von B
zu A	0,8	0,05
zu B	0,2	0,95

Die Multiplikation des Zustandsvektors $\vec{v}_0$ mit der *ersten* Zeile der Übergangsmatrix M liefert beispielsweise die Anzahl der Leser, die in der folgenden Woche die Allgemeine kaufen (1750).

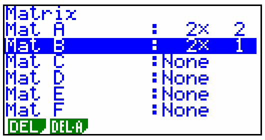
$$\vec{v}_1 = M \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1750 \\ 3250 \end{pmatrix}$$

Im Matrix-Menü gibt man die Anzahl der Zeilen und der Spalten der neuen Matrix (die hier allerdings den Namen A erhält) an und nach Bestätigung durch [EXE] die Elemente der Matrix (möglichst als Bruch).

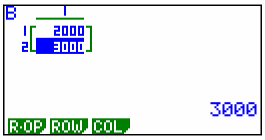




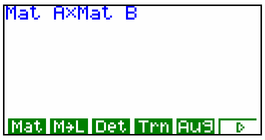
Ebenso gibt man den Zustandsvektor ein.

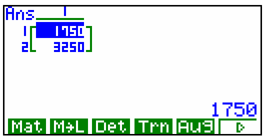


Er erhält hier die Bezeichnung B.



Im Run-Menü erfolgt die Multiplikation. Über [OPTN], [F2] (MAT), [F1](Mat) erhält man das benötigte „Mat". Der Buchstabe zur Bezeichnung der Matrix wird wie gewohnt eingegeben.





Zur Untersuchung des langfristigen Käuferverhaltens kann die prozentuale Verteilung der Gesamtleser untersucht werden. Schon nach wenigen Iterationsschritten wird eine stationäre Verteilung erkennbar.

$$\vec{v}_1 = M \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}65 \end{pmatrix}$$

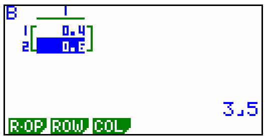
$$\vec{v}_2 = M \cdot \vec{v}_1 \approx \begin{pmatrix} 0{,}31 \\ 0{,}69 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}_3 = M^3 \cdot \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} 0{,}28 \\ 0{,}74 \end{pmatrix}$$

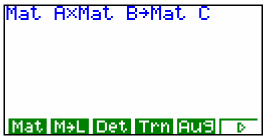
$$\vec{v}_{20} = M^{20} \cdot \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{pmatrix},$$

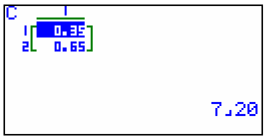
$$\vec{v}_{25} = M^{25} \cdot \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$$

In B werden die Prozentangaben (als Brüche) eingegeben.

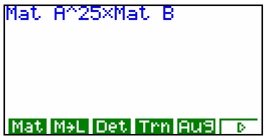


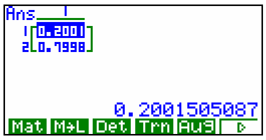
Hier wird das Ergebnis der Berechnung sofort als Matrix C gespeichert.





Potenzen einer Matrix können berechnet werden.





Die (absolute) Zahl der von A abgewanderten Leser (20% von 1000) ist nun genauso groß wie die Zahl der zu A zugewanderten Leser von B (5% von 4000). Stationäre Zustände ergeben sich, wenn das Gleichungssystem $A \cdot \vec{v}_{gr} = \vec{v}_{gr} \;\Leftrightarrow\; (A-E) \cdot \vec{v}_{gr} = \vec{0}$ nicht-triviale Lösungen hat. In diesem Fall besitzt die Matrix A den Eigenwert 1.

Bezogen auf unser Beispiel ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8-1 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

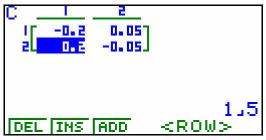
$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{gr} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Für den parameterabhängigen Lösungsvektor kann man noch als weitere Bedingung angeben, dass die Gesamtsumme der Leser mit 100% vorgegeben ist:

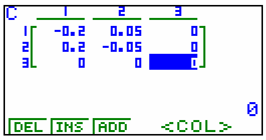
$$v_1 + v_2 = 1 = 5 \cdot t \quad \Rightarrow t = 0{,}2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{gr} = \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$$

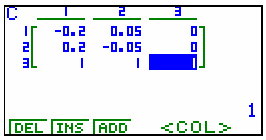
Die entsprechende Einheitsmatrix wird subtrahiert. „Identity“ erhält man über [OPTN], [F2] (MAT), [F6] (▶), [F1] (Iden). Das Ergebnis wird als Matrix C gespeichert.



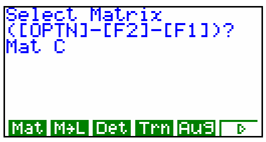
Im Matrixmenü kann man über [F2] (Row), [F3] (Add) eine Zeile hinzufügen. Über [F3] (Col), [F3] (Add) wird eine Spalte hinzugefügt.



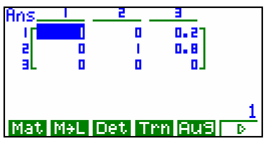
In die neue Zeile wird die weitere Bedingung eingetragen.



Das Programm RREF wird ausgeführt. Als umzuformende Matrix wird C angegeben.



Hier das Ergebnis: Der Fixvektor ist ablesbar.

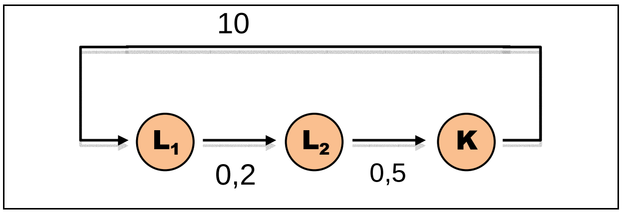


4.2 Beispielaufgabe Populationsentwicklung/„Zyklische Matrizen“

(Vgl. KROLL / REIFFERT / VAUPEL [1]) Ein Käfer (K) legt so viele Eier, dass sich daraus im nächsten Jahr 10 Larven entwickeln. Danach stirbt er. 20% der Larven (L_1) überleben das erste Jahr, im zweiten Jahr verpuppt sich die Hälfte der Larven (L_2) und wird wieder zu Käfern.

Hinweise zur Lösung:

Im nebenstehenden Übergangsgraphen werden die im Text gegebenen Informationen veranschaulicht.



Die Übergangsmatrix hat folgende Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

Man kann die Entwicklung der Larven – Käfer – Verteilung mit selbst gewählten Ausgangswerten untersuchen und erste Vermutungen zur Larven-Käfer-Entwicklung ableiten.
Es ist zu erkennen, dass sich nach drei Zeitschritten wieder der Ausgangszustand einstellt. Die Ursache für dieses zyklische Verhalten liegt in der besonderen Struktur der Übergangsmatrix:

$$\vec{v}_1 = A \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \vec{v}_1$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allgemeiner kann man festhalten: Ist für eine quadratische Übergangsmatrix A eine Potenz A^n gleich der Einheitsmatrix, so reproduziert sich innerhalb einer Spanne von n Zeitschritten ein jeweils vorliegender Zustand, wir sprechen dann von einer zyklischen Übergangsmatrix.

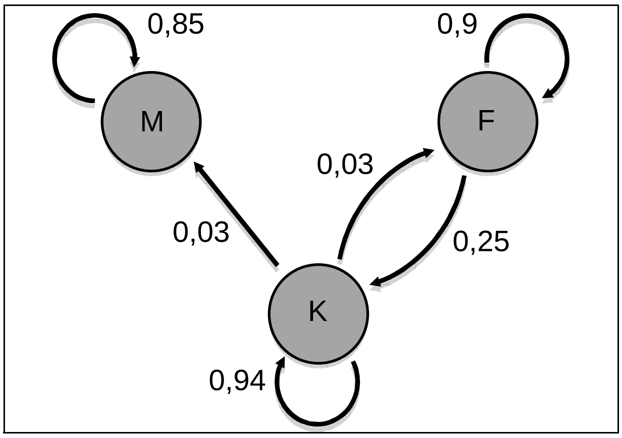
4.3 Beispielaufgabe: Populationsentwicklung

(Vgl. JAHNKE / WUTTKE [4]) Die Bevölkerung eines Landes mit 30 Millionen Einwohnern sei gleichmäßig in Männer, Frauen und Kinder aufgeteilt. Im beobachteten Zeitraum von einem Jahr erreichen jeweils 3% der männlichen u. weiblichen Kinder das Erwachsenenalter. Im Durchschnitt bekommen 25% der Frauen in diesem Jahr ein Kind. Die Sterblichkeit betrage bei den Männern 15% und bei den Frauen 10%.
Fragestellung: Wie wird sich die Bevölkerung weiter entwickeln?

Hinweise zur Lösung:

Die im Text gegebenen Informationen lassen sich wieder in einem sogenannten Übergangsgraphen veranschaulichen.

Übersetzt man die Abhängigkeiten in Gleichungen, so erhält man das nachfolgende Gleichungssystem, das sich auch in Matrix-Schreibweise notieren lässt:



$$\begin{aligned} M_{k+1} &= 0{,}85 \cdot M_k + 0 \cdot F_k + 0{,}03 \cdot K_k \\ F_{k+1} &= 0 \cdot M_k + 0{,}9 \cdot F_k + 0{,}03 \cdot K_k \\ K_{k+1} &= 0 \cdot M_k + 0{,}25 \cdot F_k + 0{,}94 \cdot K_k \end{aligned}$$

$$\vec{v}_{k+1} = \begin{pmatrix} M_{k+1} \\ F_{k+1} \\ K_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0 & 0{,}03 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}03 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}94 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_k \\ F_k \\ K_k \end{pmatrix} = A \cdot \vec{v}_k$$

Für den Zustandsvektor zur anfänglichen Verteilung kann man absolute oder relative Werte verwenden. Die Ergebnisse zeigen, dass der Anteil der Männer und Frauen an der Gesamtbevölkerung zunächst abnimmt, gleichzeitig steigt aber die Einwohnerzahl insgesamt (Summe der Vektoreinträge).

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{10} = A^{10} \cdot \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} 4{,}74 \\ 6{,}77 \\ 20{,}45 \end{pmatrix}$$

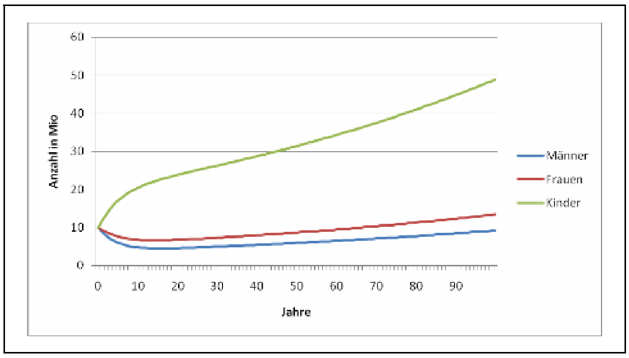
$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{20} = A^{20} \cdot \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}22 \\ 0{,}79 \end{pmatrix}$$

Bei der Betrachtung des längerfristigen Wachstums ist festzustellen:
Die Einwohnerzahl wächst immer weiter, ebenso steigt die Zahl der Männer und Frauen wieder an. Die Verteilung der Einwohner auf die betrachteten Bevölkerungsgruppen bleibt aber schließlich stabil.

$$\vec{v}_{100} \approx \begin{pmatrix} 9{,}23 \\ 13{,}47 \\ 48{,}88 \end{pmatrix}, \ldots \vec{v}_{200} \approx \begin{pmatrix} 22{,}35 \\ 32{,}61 \\ 118{,}35 \end{pmatrix}$$

Nach 100 Jahren liegt beispielsweise der Anteil der Männer an der Gesamtbevölkerung bei etwa 12,9 %, dieser Wert bleibt bei weiterer Iteration erhalten.

Die Entwicklung des Bevölkerungswachstums lässt sich auch gut mit einer Tabellenkalkulation untersuchen und graphisch veranschaulichen.



Ob es zu einem Bevölkerungswachstum kommt ist hier auch von der Wahl der Ausgangsverteilung abhängig. Betrachtet man

$$\vec{v}_{100} = A^{100} \cdot \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} 0 & 0,64 & 0,28 \\ 0 & 0,94 & 0,41 \\ 0 & 3,41 & 1,48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_0 \\ F_0 \\ K_0 \end{pmatrix} = F_0 \cdot \begin{pmatrix} 0,64 \\ 0,94 \\ 3,41 \end{pmatrix} + K_0 \cdot \begin{pmatrix} 0,28 \\ 0,41 \\ 1,48 \end{pmatrix}$$

wird deutlich, dass die Bevölkerungszahl nach 100 Jahren weitgehend unabhängig von der anfänglichen Anzahl der Männer ist. Trivialerweise stirbt die Bevölkerung aus, wenn $F_0 = K_0 = 0$ mit $M_0 > 0$ gewählt wird (anfänglich nur Männer). Geht man ebenso wenig realistisch von einer anfänglichen Verteilung von *nur* Frauen oder *nur* Kindern aus, wächst die Gesamtbevölkerung nach diesem Modell dennoch, bei beiden Vektoren ist die Summe der Einträge größer als eins.

Im vorliegenden Beispiel ist die Zeilensumme in der dritten Zeile der Übergangsmatrix A größer als eins, die hohe Geburtenrate sichert das Wachstum der Bevölkerung. Die Einträge in der Übergangsmatrix A sind positiv. Allgemeiner gilt dann, dass das durch die Matrix beschriebene System (mit $M_0, F_0, K_0 > 0$)

- konvergiert, wenn alle Zeilensummen gleich 1 sind,
- expandiert, wenn alle Zeilensummen größer als 1 sind,
- zerfällt, wenn alle Zeilensummen der Matrix kleiner als 1 sind.

Ein Beispiel für den letztgenannten Fall wäre in diesem Kontext die Übergangsmatrix A mit:

$$\vec{v}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0 & 0,03 \\ 0 & 0,9 & 0,03 \\ 0 & 0,05 & 0,94 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_k \\ F_k \\ K_k \end{pmatrix} = A \cdot \vec{v}_k$$

Der durch $\vec{v}_{max}$ gegebene Vektor

$$\vec{v}_{max} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0 & 0,03 \\ 0 & 0,9 & 0,03 \\ 0 & 0,05 & 0,94 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ m \\ m \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} 0,88 \\ 0,93 \\ 0,99 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad m = \max(M_k, F_k, K_k)$$

lässt in allen betrachteten Bevölkerungsgruppen eine Abnahme erkennen, da die Einträge im Zeilensummenvektor sämtlich kleiner als eins sind.

4.4 Typische Fragestellungen und Aufgaben

Typische Frage- und Aufgabenstellungen zu den dargestellten Beispielen sind, besonders auch bei komplexeren Aufgaben und anderen Kontexten:

- Wechsel der Darstellungsform (Text, Übergangsgraphen, Matrizen)
- Elemente aus vorgegebener Matrix kontextbezogen interpretieren
- Zustandsvektoren angeben / aus Text entnehmen / kontextbezogen interpretieren
- mit Hilfe der Übergangsmatrix einzelne Folge-Zustands-Vektoren berechnen
- aus gegebenem Zustandsvektor auf vorhergehenden schließen
  (lineares Gleichungssystem bzw. Multiplikation mit inverser Matrix)
- Entwicklung/Verteilung hinsichtlich eines Grenz-Zustandes/einer Grenz-Verteilung untersuchen,
- zyklisches Verhalten erkennen, nachweisen, interpretieren
- Parametervariation in Übergangsmatrix: Untersuchung von Auswirkungen

Beispiele für (Abitur-) Aufgaben, bei denen Übergangsmatrizen mit weiterführenden Fragestellungen untersucht werden, findet man bei KNECHTEL / WEISKIRCH [5].

5 Quellen, weiterführende Literatur und Internet-Verweise

[1] KROLL / REIFFERT / VAUPEL: *Analytische Geometrie/Lineare Algebra*, Grund- und Leistungskurs; Dümmler; Bonn 1997

[2] GRIESEL, H., u.a. (Hrsg.): *Elemente der Mathematik*, Grundkurs 12/13; Schroedel, Hannover 2002

[3] GRIESEL/POSTEL (Hrsg.): *Mathematik heute*, *Lineare Algebra/Analytische Geometrie*; Schroedel, Hannover 1996

[4] JAHNKE, WUTTKE (Hrsg.): *Mathematik – Analytische Geometrie, Lineare Algebra*; Cornelsen, Berlin 2003

[5] KNECHTEL, H.; WEISKIRCH, W. (Hrsg.): *Abituraufgaben mit Graphikrechnern und Taschencomputern* (Teil 1 - 3); Schroedel Verlag GmbH, Hannover / Braunschweig 2001 - 2005

[6] LEHMANN, E.: *Lineare Algebra mit Vektoren und Matrizen*; Metzler, Stuttgart 1990

[7] LEHMANN, E.: *Problemorientierte Unterrichtseinheiten Wahrscheinlichkeitsrechnung;* Volk und Wissen, Berlin 1997

[8] JAKOBS/SORGE: *In welchem Laden kaufst Du morgen ein?, MARKOW - Ketten und Entscheidungen*; in: mathematik lehren, Heft **63** (1994)

[9] TYSIAK: *Multiplikation von Produktionsmatrizen und Gozinto-Verfahren*; in: MNU 51/4

[10] VEHLING, R.: *Wozu kann man Matrizen gebrauchen?*; in: nli-Berichte Band 64/2001

[11] SCHÖWE, R., u.a.: *Lineare Algebra - Kaufmannisch-wirtschaftliche Richtung*; Cornelsen, Berlin 1998

[12] Die Firma Casio bietet die Programme „ref“ und „rref“, Programme zum Rechnerupdate, Installations- und Bedienungsanleitungen zum Download an unter: http://www.casio-schulrechner.de/de/downloads/

6 Einstiegsaufgaben Materialverflechtung

Das folgende Aufgabenset Kuchenproduktion-Modelleisenbahn-Bauprojekt soll den Schülerinnen und Schüler ermöglichen, in einem Gruppenpuzzle die wesentlichen Grundlagen selbst zu erarbeiten.

Thema A: Kuchenproduktion

In einer Bäckerei werden nach alten Familienrezepten zwei Sorten Kuchen gebacken: **Streuselkuchen** und **Butterkuchen**. Für einen Streuselkuchen benötigt man laut Rezept 2 Teelöffel Backpulver, 4 Eier, 800g Mehl, 400g Fett und 375g Zucker. Für den Butterkuchen benötigt man jeweils 3 Eier, 600g Mehl, ein halbes Pfund Butter, 450 g Zucker und einen Teelöffel Backpulver. Diese Kuchen erfreuen sich allgemein großer Beliebtheit, auch weltweit gibt es eine große Nachfrage. Deshalb werden diese Backwaren auch in Paketen zum Versand angeboten, dabei gibt es drei verschiedene Arten der Paketzusammenstellung. Paket A enthält 2 Streuselkuchen und 5 Butterkuchen. Paket B enthält 3 Streuselkuchen und doppelt so viele Butterkuchen. Paket C enthält 4 Butterkuchen und einen Streuselkuchen.

1. Füllen Sie die beiden Tabellen aus.

Tabelle1	Streuselkuchen	Butterkuchen
Backpulver		
Eier		
Mehl		
Fett		
Zucker		

Tabelle 2	Paket A	Paket B	Paket C
Streuselkuchen			
Butterkuchen			

2. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse in der Expertengruppe und nehmen Sie eventuell notwendige Korrekturen vor.
   Bestimmen gemeinsam mit Ihren beiden Partnern, welche Zutatenmenge die Bäckerei für jeweils ein Paket der Sorten A, B, C benötigt. Beschreiben Sie in Form einer Anleitung, wie man Tabelle 3 aus den Tabellen 1 und 2 gewinnt.

Hilfsmittel: Tabelle für Ihre ausführlichen Rechnungen:

Tabelle 3	Paket A	Paket B	Paket C
Backpulver			
Eier			
Mehl			
Fett			
Zucker			

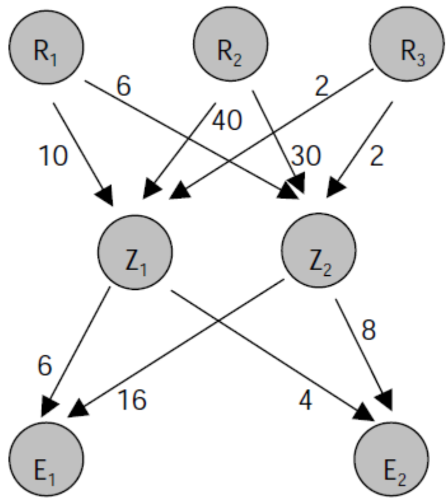
Tabelle für die Ergebnisse:

Tabelle 3	Paket A	Paket B	Paket C
Backpulver			
Eier			
Mehl			
Fett			
Zucker			

3. Spezialisten geben ihr Wissen weiter und verallgemeinern
   Stellen Sie sich in der Stammgruppe gegenseitig Ihre Ergebnisse vor. Untersuchen Sie anschließend gemeinsam, mit welcher allgemeinen Rechenvorschrift man Tabelle 3 aus den ersten beiden Tabellen erhält.

Thema B: Modelleisenbahn

Ein Hersteller von Modelleisenbahnen bietet für die Spur H0 Anfangs- und Ergänzungspackungen an. Aus den Ausgangsprodukten Schwellen, Schienen und Gleisverbinder sollen über die Zwischenprodukte - gerade und gebogene Gleise - die beiden Packungen zusammengestellt werden. Das nebenstehende Verflechtungsdiagramm zeigt wie viele Einheiten der Rohstoffe man für die Zwischenprodukte braucht und wieviele Einheiten von Zwischenprodukten jeweils für eine Einheit der Endprodukte benötigt werden.



Dabei gelten die folgenden Bezeichnungen:

R1: Schwellen, R2: Schienenstränge (in der Einheit cm), R3: Gleisverbindungen, Z1: gerade Gleise, Z2: gebogene Gleise, E1: Anfangspackung, E2: Ergänzungspackung.

1. Übersetzen Sie in Einzelarbeit das Verflechtungsdiagramm in einen wenige Sätze umfassenden, verständlichen Text.
   Füllen Sie anschließend. die beiden Tabellen aus.

Tabelle1	gerade Gleise	gebogene Gleise
Schwellen		
Schienenstränge		
Gleisverbindungen		

Tabelle 2	Anfangspackung	Ergänzungspackung
gerade Gleise		
gebogene Gleise		

2. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse in der Expertengruppe und nehmen Sie eventuell notwendige Korrekturen vor.
   Bestimmen Sie gemeinsam mit Ihren beiden Partnern, wie viel Einheiten der Rohstoffe die Firma jeweils für eine Anfangspackung und für eine Ergänzungspackung benötigt.
   Beschreiben Sie in Form einer Anleitung, wie man Tabelle 3 aus den Tabellen 1 und 2 gewinnt.

Hilfsmittel: Tabelle für Ihre ausführlichen Rechnungen:

Tabelle 3	Anfangspackung	Ergänzungspackung
Schwellen		
Schienenstränge		
Gleisverbindungen		

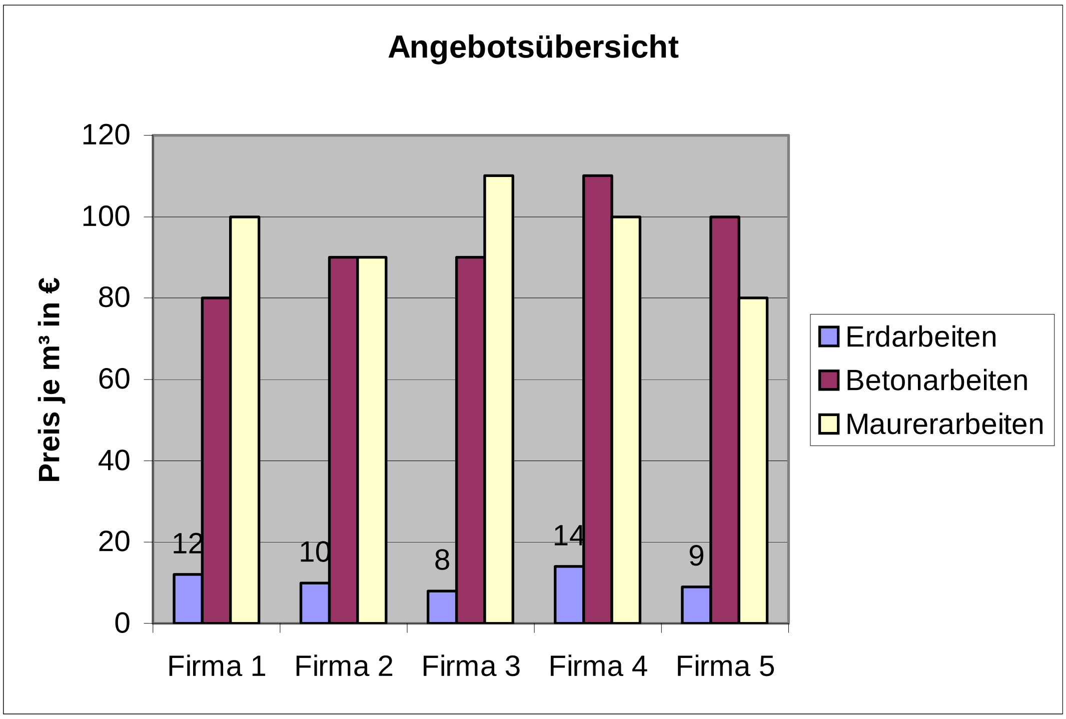
Tabelle für die Ergebnisse:

Tabelle 3	Anfangspackung	Ergänzungspackung
Schwellen		
Schienenstränge		
Gleisverbindungen		

3. Spezialisten geben ihr Wissen weiter und verallgemeinern
   Stellen Sie sich in der Stammgruppe gegenseitig Ihre Ergebnisse vor. Untersuchen Sie anschließend gemeinsam, mit welcher allgemeinen Rechenvorschrift man Tabelle 3 aus den ersten beiden Tabellen erhält.

Thema C: Bauprojekt

In einer Stadtverwaltung werden die Rohbauarbeiten für 4 Bauprojekte ausgeschrieben. Es bewerben sich 5 Firmen um die Ausführung der Arbeiten.



Folgende Projekte sind in Planung:
Projekt 1 umfasst 1200m³ Erdarbeiten, 800m³ Betonarbeiten und 900m³ Maurerarbeiten. Für das 2.Projekt werden 600m³ Betonarbeiten, 400m³ Maurerarbeiten und 2000m³ Erdarbeiten veranschlagt. 400m³ Betonarbeiten,600m³ Maurerarbeiten und 500m³ Erdarbeiten umfasst Projekt 3. Für das letzte Projekt rechnet man schließlich mit 15000m³ Erdarbeiten, 10000m³ Maurerarbeiten und 12000m³ Betonarbeiten.

1. Vervollständigen Sie in Einzelarbeit die folgenden Tabellen.

Tabelle 1	Erdarbeiten	Betonarbeiten	Maurerarbeiten
Firma 1			
Firma 2			
Firma 3			
Firma 4			
Firma 5			

Preise in € je m³

Tabelle 2	Projekt 1	Projekt 2	Projekt 3	Projekt 4
Erdarbeiten				
Betonarbeiten				
Maurerarbeiten				

Massen in m³

2. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse in der Expertengruppe und nehmen Sie eventuell notwendige Korrekturen vor.
   Erarbeiten Sie gemeinsam auf der Grundlage der Daten einen Vorschlag an die Stadtverwaltung dafür, wie die Auftragsvergabe erfolgen sollte. Verwenden Sie dazu die beiden Tabellen

Hilfsmittel: Tabelle für Ihre ausführlichen Rechnungen:

Tabelle 3	Projekt 1	Projekt 2	Projekt 3	Projekt 4
Firma 1				
Firma 2				
Firma 3				
Firma 4				
Firma 5				

Tabelle für die Ergebnisse:

Tabelle 3	Projekt 1	Projekt 2	Projekt 3	Projekt 4
Firma 1				
Firma 2				
Firma 3				
Firma 4				
Firma 5				

3. Spezialisten geben ihr Wissen weiter und verallgemeinern
   Stellen Sie sich in der Stammgruppe gegenseitig Ihre Ergebnisse vor. Untersuchen Sie anschließend gemeinsam, mit welcher allgemeinen Rechenvorschrift man Tabelle 3 aus den ersten beiden Tabellen erhält.

7 weitere Aufgaben zur Materialverflechtung

Zentralabitur 2006	**Mathematik**	**Schülermaterial**
Rechnertyp: GTR	**Grundkurs**	**Fachgymnasium Wirtschaft**

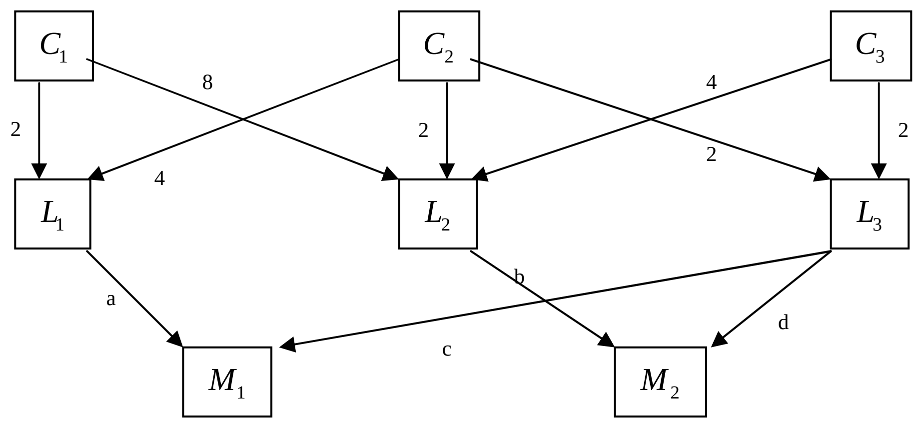
Aufgabenblock 2B

Aufgabe „Lineare Algebra“

Ein Safthersteller stellt in einem Werk unter anderem die zwei Light-Fruchtmixgetränke M_1 und M_2 her.

Die drei Zitrusgeschmacksstoffe C_1, C_2 und C_3 ergeben mit einer bestimmten Menge Wasser und Zuckeraustauschstoffen die Light-Zwischenprodukte L_1, L_2 und L_3. Diese Zwischenprodukte werden miteinander gemischt und ergeben die Endprodukte.

Das Diagramm zeigt die Verflechtung in Mengeneinheiten [ME].



a) Bestimmen Sie die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B. Berechnen Sie die Werte für a, b, c und d wenn die Rohstoff-Endprodukt-Matrix $C = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 28 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$ bekannt ist.

b) Der Preis je Mengeneinheit [ME] der Rohstoffe beträgt:

	C_1	**C_2**	**C_3**
1 ME	**1 GE**	**3 GE**	**2 GE**

Berechnen Sie die Rohstoffkosten für eine ME je Endprodukt.

Die sonstigen Kosten werden mit 880 GE veranschlagt. Da das Werk Teil eines Konzerns ist, sind die Produktionszahlen mit $0{,}75x^2$ ME von M_1 und 2x ME von M_2 vorgegeben. Die Konzernzentrale teilt dem Werk den jeweiligen Wert x mit x als Maß für die Auslastung der Unternehmung. Erstellen Sie die Gesamtkostenfunktion K.

Zentralabitur 2006	**Mathematik**	**Lehrermaterial**
Rechnertyp: GTR	**Grundkurs**	**Fachgymnasium Wirtschaft**

Aufgabenblock 2B Aufgabe „Lineare Algebra“

Erwartungshorizont

Auf-gabe	**Erwartete Schülerleistungen**	Anforderungsbereiche **Bewertung** I	II	III
a)	$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 28 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$ Lösen über ein Lineares Gleichungssystem führt zu: a = 4, b = 2; c = 6; d=4	**3**	**6**	
b)	Rohstoffkosten: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 28 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 116 & 84 \end{pmatrix}$ Berechnung der Gesamtkostenfunktion: $\begin{pmatrix} 116 & 84 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}75\, x^2 \\ 2\, x \end{pmatrix} = 87\, x^2 + 168\, x$ K : K(x) = $87\, x^2 + 168\, x + 880$	**3**	**3**	
	Summe:	**6**	**9**	

Zentralabitur 2008	Mathematik	Schülermaterial
Rechnertyp: GTR	gA	Fachgymnasium Wirtschaft Fachgymnasium GuS

Aufgabenblock 2B

Aufgabe „Lineare Algebra"

Ein Hersteller von Düngemitteln produziert aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3. Diese werden zu den Endprodukten E_1, E_2 und E_3 verarbeitet.

Der mehrstufige Produktionsprozess kann wie folgt dargestellt werden:

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	1
Z_2	3	4	3
Z_3	1	0	2

	E_1	E_2	E_3
R_1	11	9	13
R_2	33	28	36
R_3	15	17	15

a) Berechnen Sie die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix, die angibt, wie viele Mengeneinheiten [ME] der Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 für je eine ME der Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 benötigt werden.
Bestimmen Sie für je eine Einheit der Endprodukte die Rohstoffkosten unter Berücksichtigung der folgenden Rohstoffpreise:

Rohstoff	R_1	R_2	R_3
Preis in Geldeinheiten je ME [GE/ME]	5	7	10

b) Die Prognose der Marketingabteilung weist für das kommende Quartal folgende Absatzzahlen und Preise aus:

Produkt	Absatzmenge in ME	Preis in GE/ME
E_1	200	600
E_2	150	420
E_3	50	500

Aufgrund gestiegener Rohstoffpreise soll der Rohstoff R_2 von einem anderen Lieferer bezogen werden, während die Rohstoffpreise für R_1 und R_3 unverändert bleiben.

Berechnen Sie den maximalen Einkaufspreis in GE/ME für R_2, wenn mindestens 23200 GE Gewinn erwirtschaftet werden sollen.

Zentralabitur 2008	Mathematik	Lehrermaterial
Rechnertyp: GTR	gA	Fachgymnasium Wirtschaft Fachgymnasium GuS

Aufgabenblock 2B

Aufgabe „Lineare Algebra“

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ___________________

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	Punkte Soll	Punkte Ist
a)	M_{RZ} = Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix M_{ZE} = Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix M_{RE} = Rohstoff-Endprodukt-Matrix $M_{ZE}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}89 & -0{,}22 & -0{,}11 \\ -0{,}33 & 0{,}33 & -0{,}33 \\ -0{,}44 & 0{,}11 & 0{,}56 \end{pmatrix}$ Matrix M_{RZ} : $M_{RZ} = M_{RE} \cdot M_{ZE}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ Berechnung der Rohstoffkosten: $\overline{k_R} \cdot M_{RE} = \overline{k_v} = (5 \quad 7 \quad 10) \cdot \begin{pmatrix} 11 & 9 & 13 \\ 33 & 28 & 36 \\ 15 & 17 & 15 \end{pmatrix} = (436 \quad 411 \quad 467)$ Die Rohstoffkosten betragen für E_1 436 GE/ME, für E_2 411 GE/ME und für E_3 467 GE/ME.	I, II	8	
b)	Erlös: $E = 200 \cdot 600 + 150 \cdot 420 + 50 \cdot 500 = 208000$ Maximale Produktionskosten $Erlös - Gewinn = 208000 - 23200 = 184800$: $K(a) = (5 \quad a \quad 10) \cdot \begin{pmatrix} 11 & 9 & 13 \\ 33 & 28 & 36 \\ 15 & 17 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 50 \end{pmatrix}$ $= (5 \quad a \quad 10) \cdot \begin{pmatrix} 4200 \\ 12600 \\ 6300 \end{pmatrix} = 84000 + 12600\,a$ Bestimmung des maximalen Preises für R_2: $84000 + 12600\,a \le 184800 \Rightarrow a \le 8$ R_2 darf maximal 8 GE/ME kosten.	I, II	7	
	Summe:		**15**	

Zentralabitur 2006	Mathematik	Schülermaterial
Rechnertyp: GTR	Leistungskurs	Fachgymnasium Wirtschaft

Aufgabenblock 2B

Aufgabe „Lineare Algebra“

In einem zweistufigen Produktionsprozess werden von einem Betrieb der Kosmetikbranche die vier Rohstoffe R_1, R_2, R_3 und R_4 zu den drei Grundsubstanzen G_1, G_2 und G_3 verarbeitet. Aus diesen drei Grundsubstanzen werden schließlich drei Hautcremes E_1, E_2 und E_3 als Endprodukte hergestellt. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist durch die beiden folgenden Tabellen gegeben.

	G_1	G_2	G_3
R_1	1	2	4
R_2	3	0	4
R_3	0	2	2
R_4	0	3	1

	E_1	E_2	E_3
G_1	3	2	0
G_2	1	2	5
G_3	0	3	2

a) Berechnen Sie die Matrix, welche den Verbrauch an Rohstoffen für je eine ME der Endprodukte angibt.
Ermitteln Sie die Mengeneinheiten der einzelnen benötigten Rohstoffe, wenn für den Kunden Müller 10 ME von E_1, 15 ME von E_2 und 25 ME von E_3 herzustellen sind.
Folgende Rohstoffmengen sind lagermäßig vorhanden:

R_1: 700; R_2: 430; R_3: 400; R_4: 460

Die Rohstoffe R_2, R_3 und R_4 müssen aus Haltbarkeitsgründen vollständig verbraucht werden, während der Bestand von R_1 falls nötig kurzfristig nachbestellt oder längere Zeit gelagert werden kann. Ermitteln Sie die Mengeneinheiten der Endprodukte, die unter diesen Bedingungen hergestellt werden können. Berechnen Sie die benötigten Mengeneinheiten von R_1.

b) Die Kosten für den Produktionsprozess müssen neu kalkuliert werden. Der Kunde Müller bestellt 10 ME von E_1, 15 ME von E_2 und 25 ME von E_3. Dabei dürfen die Kosten für die Rohstoffe je Endprodukt und die Herstellungskosten der Grundsubstanzen je Endprodukt zusammen einen Betrag von 105 000 € nicht überschreiten.
Die Materialkosten beragen 99700 €.
Die Herstellungskosten (in €) der Grundsubstanzen sind gegeben durch $\vec{k}_G = \begin{pmatrix} 12 & 16 & a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{N}$.
Ermitteln Sie die maximal zulässigen Herstellungskosten für die Grundsubstanz G_3, wenn der oben genannte Betrag von 105 000 € nicht überschritten werden darf.

Zentralabitur 2006	**Mathematik**	**Lehrermaterial**
Rechnertyp: GTR	**Leistungskurs**	**Fachgymnasium Wirtschaft**

Aufgabenblock 2B Aufgabe „Lineare Algebra“

Erwartungshorizont

Auf-gabe	**Erwartete Schülerleistungen**	Anforderungsbereiche Bewertung **I**	**II**	**III**
a)	Rohstoff-Endprodukt-Matrix $C_{RE} = A_{RG} \cdot B_{GE}$ $C_{RE} = \begin{pmatrix} 5 & 18 & 18 \\ 9 & 18 & 8 \\ 2 & 10 & 14 \\ 3 & 9 & 17 \end{pmatrix}$ Rohstoffmengen: $C_{RE} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 770 \\ 560 \\ 520 \\ 590 \end{pmatrix}$ Ansatz Endprodukte: $C_{RE} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 430 \\ 400 \\ 460 \end{pmatrix}$ $C_{RE}^{reduziert} = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 8 \\ 2 & 10 & 14 \\ 3 & 9 & 17 \end{pmatrix}$ $C_{RE}^{reduziert} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 \\ 400 \\ 460 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$ t = 590	**4**	**7**	**2**
b)	Ansatz Kosten der Grundsubstanzen je Endprodukt: $\overrightarrow{k_G} \cdot B_{GE} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 25 \end{pmatrix} = 3360 + 95a$ Ansatz Gesamtkosten: $99.700 + 3.360 + 95a \leq 105000$ $a \leq \frac{388}{19} \approx 20{,}42 \wedge a \in IN$ max Herstellungskosten G_3: a = 20	**3**	**4**	
	Summe:	**7**	**11**	**2**

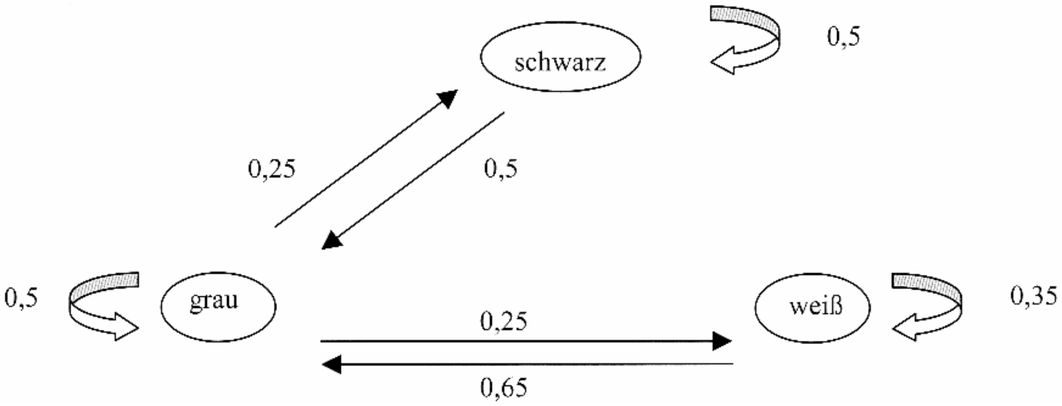
8 Aufgaben zu Matrizen bei mehrstufigen Prozessen

Entwicklung einer Mäuse-Population[1]

Für die neuen fünften Klassen wird eine Tier-AG eingerichtet, die sich um die schuleigenen Terrarien kümmern soll. Das Schulbiologiezentrum stellt der Goetheschule drei verschiedene Mäuserassen zur Verfügung.

Typ 1: schwarze Mäuse Typ 2: graue Mäuse Typ 3: weiße Mäuse

Die Pfeile in der Abbildung geben für jede Farbe an, welcher Anteil in der nächsten Generation dieFarbe wechselt bzw. die Farbe beibehält, wenn die Mäuse immer mit Typ 2 gekreuzt werden.



Bestimmen Sie die Übergangsmatrix und erläutern Sie diese kurz, ohne auf die biologischen Grundlagen einzugehen.

Beobachten Sie den Populationsverlauf über mehr als 10 Generationen, wenn zu Beginn 50 % schwarze Mäuse, 30 % graue Mäuse und 20 % weiße Mäuse vorhanden sind. Kommentieren Sie das Ergebnis.

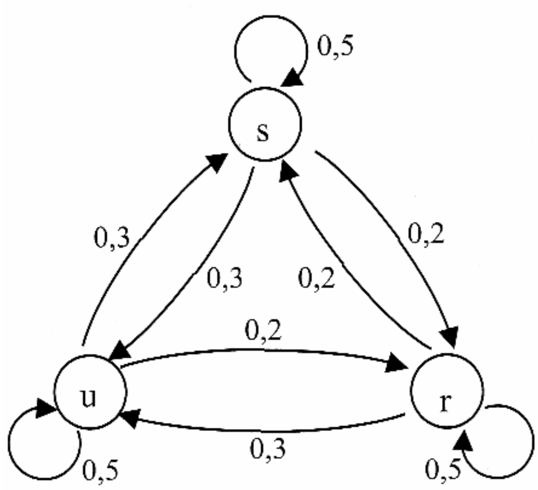
Im Laufe der Zeit erweisen sich die weißen Mäuse als ziemlich anfällig gegen Krankheiten, sodass sie nur zu 15 % fruchtbare Nachkommen hervorbringen können. Die Tier-AG vermutet, dass die weißen Mäuse bald aussterben werden und nur noch schwarze und graue Mäuse übrig bleiben.

Stellen Sie für diese Situation die Übergangsmatrix auf, und berechnen Sie den langfristigen Verlauf der Entwicklung, wenn zu Beginn 50 schwarze Mäuse, 30 graue Mäuse und 20 weiße Mäuse vorhanden sind. Hat die Tier-AG Recht?

[1] KNECHTEL, H.; WEISKIRCH, W. (Hrsg.): *Abituraufgaben mit Graphikrechnern und Taschencomputer,* Teil 3; Schroedel Verlag GmbH, Hannover / Braunschweig 2005

Wetterentwicklung in der Gemeinde Weyhe[2]

Die Wetterentwicklung in der Gemeinde Weyhe ist über längere Zeit beobachtet worden. Dabei wurde zwischen sonnigem Wetter, unbeständigem Wetter und regnerischem Wetter unterschieden. Genauere Informationen liefert der nebenstehende Übergangsgraph:



a) Beschreiben Sie die in dem Übergangsgraphen enthaltenen Informationen in Worten! Wählen Sie dazu exemplarisch Zahlen aus. Untersuchen Sie, ob im Übergangsgraphen Wahrscheinlichkeiten dargestellt sind. Heute ist sonniges Wetter. Geben Sie einen Wetterbericht für morgen und übermorgen und erläutern Sie Ihre Berechnung durch Baumdiagramme!

b) Stellen Sie die Situation, mit Hilfe einer Übergangstabelle und einer Übergangsmatrixdar!

Erläutern Sie die Aussage der Anfangsverteilung $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Wetterentwicklung als Matrizen- Produkt und vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis in a). Angenommen, die Übergangsbedingungen bleiben erhalten: Wie wird das Wetter langfristig? Untersuchen Sie, ob die langfristige Wetterentwicklung von der Anfangs-Verteilung abhängt und interpretieren Sie das Ergebnis hinsichtlich des praktischen Nutzens einer solchen langfristigen Prognose!

c) Bilden Sie höhere Potenzen Ihrer Übergangsmatrix, deuten Sie das Ergebnis und vergleichen Sie mit Ihren Ausführungen in b). Erklären Sie dieses Ergebnis!

d) Berechnen Sie die Wetterwahrscheinlichkeiten für übermorgen, wenn heute die drei Zustände gleichwahrscheinlich sind. Vergleichen Sie mit einer Berechnung, bei der die Verteilung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$ zugrunde gelegt wird und deuten Sie das Ergebnis bezüglich einer möglicherweise notwendigen Änderung der Wettervorhersage unter dieser Annahme. Für zwei verschiedene Tage wird folgende Wetterverteilung vorhergesagt: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}26 \\ 0{,}36 \\ 0{,}38 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}4 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$. Wie war die Wetterverteilung für den jeweiligen Vortag? Deuten Sie das zweite Ergebnis!

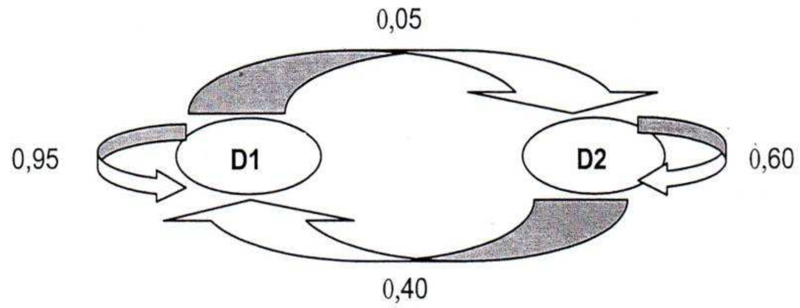
[2] nach: KNECHTEL, H.; WEISKIRCH, W. (Hrsg.): *Abituraufgaben mit Graphikrechnern und Taschencomputern*, Teil 2; Schroedel Verlag GmbH, Hannover / Braunschweig 2001

Freie Hansestadt Bremen
Der Senator für Bildung und Wissenschaft
Schriftliche Abiturprüfung 2007

Lehrermaterialien GK Mathematik

Aufgabe: **Diskothekenbesucher** **Lineare Algebra**

In einer Kleinstadt gibt es nur zwei Diskotheken, die jedes Wochenende von den Jugendlichen des Ortes besucht werden. Man hat festgestellt, dass das Wechselverhalten der Jugendlichen zwischen den beiden Diskotheken D1 und D2 von Woche zu Woche durch das folgende Diagramm beschrieben werden kann.



Runden Sie bei Ihren Rechnungen auf 3 Nachkommastellen.

a) Erstellen Sie die Übergangsmatrix S mit Hilfe des Übergangsdiagramms.

Weisen Sie nach, dass gilt: $S^2 = \begin{pmatrix} 0{,}923 & 0{,}620 \\ 0{,}078 & 0{,}380 \end{pmatrix}$.

Erläutern Sie die Entstehung von S^2 und interpretieren Sie die Bedeutung des Wertes $0{,}620$.

An einem bestimmten Wochenende (am Wochenende 0) waren 90% der Jugendlichen in Diskothek 1 (D1) und die restlichen 10% in der Diskothek 2 (D2).

b) Berechnen Sie die Besucherverteilungen am $3.,5.,7.,8.$ Wochenende, gehen Sie dabei davon aus, dass sich das Wechselverhalten der Besucher nicht ändert. Die Ergebnisse legen eine Vermutung über die langfristige Verteilung der Jugendlichen auf die beiden Diskotheken nahe. Beschreiben Sie Ihre Vermutung.

c) Zeigen Sie, dass es eine stationäre Besucherverteilung gibt und berechnen Sie diese. Geben Sie die Anteile in Bruchform an.

d) Gegeben ist die Matrix G mit $G = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$. Überprüfen Sie die Wirkung der Matrix G auf einen beliebigen Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1 + x_2 = 1$ und beschreiben Sie, was die Matrix G in diesem Zusammenhang leistet.
Berechnen Sie $S * G$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Freie Hansestadt Bremen
Der Senator für Bildung und Wissenschaft
Schriftliche Abiturprüfung 2007

Lehrermaterialien GK Mathematik

Aufgabe: **Diskothekenbesucher** **Lineare Algebra**

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

	Lösungsskizze	Bewertung/Zuordnung I	II	III
a)	$S=\begin{pmatrix}0{,}95 & 0{,}4\\0{,}05 & 0{,}6\end{pmatrix}$; dann erhält man S^2 mit der Matrix-Matrix-Multiplikation, z.B. für das erste Element der Matrix S^2: $0{,}95\cdot 0{,}95+0{,}4\cdot 0{,}05=0{,}9225\approx 0{,}923$. Der Wert $0{,}620$ in S^2 gibt den Anteil der gesamten D2-Besucher an, die in einem zweiwöchigen Rhythmus zur Diskothek D1 wechseln.	3	4	
b)	$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0{,}891\\0{,}109\end{pmatrix}$; $\vec{a}_5=\begin{pmatrix}0{,}889\\0{,}111\end{pmatrix}$; $\vec{a}_7=\begin{pmatrix}0{,}889\\0{,}111\end{pmatrix}$; $\vec{a}_8=\begin{pmatrix}0{,}889\\0{,}111\end{pmatrix}$ mit $\vec{a}_0=\begin{pmatrix}0{,}90\\0{,}10\end{pmatrix}$ und $S*\vec{a}_0=\vec{a}_1$, $S*\vec{a}_1=\vec{a}_2$ usw. oder mit Hilfe von Produkten von Potenzen von S mit $\vec{a}_0$. Vermutungen könnten z.B. sein: Einpendeln auf eine stationäre Verteilung von $88{,}9\%$ der Jugendlichen bei D1 und $11{,}1\%$ bei D2. Stabilisierung der Besucheranteile mit $\lim\limits_{n\to\infty}(S^n*\vec{a}_0)=\begin{pmatrix}\frac{8}{9}\\\frac{1}{9}\end{pmatrix}$. Es existiert eine Grenzmatrix $G=\lim\limits_{n\to\infty}S^n$ mit $G*\vec{a}_0=\vec{v}$, $\vec{v}$ stationäre Verteilung.	5	4	
c)	Z.B. führt $0{,}40\cdot v_2=0{,}05\cdot v_1=0{,}05\cdot(1-v_2)$ zu $v_2=\frac{1}{9}$ und $v_1=\frac{8}{9}$ für $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$. Oder über den Ansatz: $S*\vec{v}=\vec{v}$ und $v_1+v_2=1 \Leftrightarrow 0{,}05\cdot(1-v_2)-0{,}4\cdot v_2=0$ und $v_1+v_2=1 \Leftrightarrow v_2=\frac{1}{9}$ und $v_1=\frac{8}{9}$.	3	5	
d)	$G*\vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{8}{9} & \frac{8}{9}\\\frac{1}{9} & \frac{1}{9}\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{9}x_1+\frac{8}{9}x_2\\\frac{1}{9}x_1+\frac{1}{9}x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{9}(x_1+x_2)\\\frac{1}{9}(x_1+x_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{9}\\\frac{1}{9}\end{pmatrix}=\vec{v}$, da $x_1+x_2=1$. Also ergibt sich aus $G*\vec{x}$ mit $x_1+x_2=1$ immer die stationäre Verteilung von S. Die Berechnung ergibt, dass $S*G=G$, G ist Grenzmatrix: $G=\lim\limits_{n\to\infty}S^n$.	2	4	3
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**13**	**17**	**3**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	39%	52%	9%

Aufgabe Dierksophus luminosa

Auf einer abgelegenen Pazifikinsel untersuchten Forscher im Jahr 2008 das Vorkommen der Rieseninsektenart Dierksophus luminosa, deren Lebenszeit in vier Entwicklungsstadien abläuft: als Ei(E_1), als Larve (E_2), als Altlarve (E_3) und als Erwachsenentier (E_4). Jährlich werden laut Forschungsbericht bei dieser Art 60 Prozent der Eier zu Larven, 5 Prozent der Eier überspringen dieses Stadium und werden direkt zu Altlarven. 40 Prozent der Larven werden jedes Jahr zu Altlarven und 70 Prozent aller Altlarven zu Erwachsenentieren. Die Erwachsenentiere legen im Jahr pro Tier vier Eier.

a) Zeichnen Sie das zugehörige Prozessdiagramm.
b) Geben Sie die Übergangsmatrix P zu obigem Prozess an.
c) Eine Schätzung der Anzahlen im Jahr 2008 ergab 80 Erwachsenentiere, 400 Altlarven, 500 Larven und 100 Eier. Wie viele Tiere werden in den folgenden drei Jahren in jedem Entwicklungsstadium aufzufinden sein? Wie sieht es in zwanzig (hundert) Jahren aus?
d) Man gebe ein Verfahren an, mit dem man die Anzahlen in den Jahren vor 2008 bestimmen kann und berechne damit die Anzahlen an Erwachsenentieren in den Jahren 2007 und 1997. Man interpretiere das Ergebnis.

Aufgabe Wirtschaftsregionen[3]:
Ein Land „XYZ“ sei aufgeteilt in drei Wirtschaftsregionen R1, R2 und R3. Zwischen diesen Regionen finde eine jährliche Bevölkerungswanderbewegung statt gemäß folgender Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}06 & 0{,}80 & 0{,}20 \\ 0{,}04 & 0{,}10 & 0{,}70 \end{pmatrix} \text{ und dem Startvektor . } \vec{x} = \begin{pmatrix} 14{,}40 \\ 20{,}60 \\ 25{,}00 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen im Startvektor sind in Millionen zu verstehen und sind in der Reihenfolge R1, R2 und R3 von oben nach unten im Startvektor (Anfangsverteilung im Jahre 0!) eingetragen. Entsprechend ist die Anordnung in der Matrix A zu sehen. Im betrachteten Modell soll zunächst davon ausgegangen werden, dass im Land „XYZ“ Geburten und Todesfälle sich aufheben und Veränderungen in den Regionen nur durch die Bevölkerungswanderbewegungen entstehen.

a) Interpretieren Sie die Bedeutung der Werte in der Matrix A und stellen Sie den Prozess graphisch dar. Finden Sie außerdem mit Angabe der Begründung heraus, wie viele Personen innerhalb der ersten 2 Jahre insgesamt von Region R2 zu Region R1 abwandern.
b) Versuchen Sie experimentell die Entwicklung in den nächsten 50 Jahren zu ermitteln, zu beschreiben und zu deuten. Wählen Sie auch andere Startvektoren!
Lösen Sie die Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ zur Bestimmung eines unbekannten Startvektors $\vec{x}$ und vergleichen Sie mit den bisherigen Resultaten, wenn vorausgesetzt wird, dass die Summe der drei Koordinaten von $\vec{x}$ weiterhin 60,00 Millionen ist, und stellen Sie Zusammenhänge mit den durchgeführten Experimenten her!
c) Aus den Daten von oben ergibt sich für die Region R1 folgende Entwicklung:

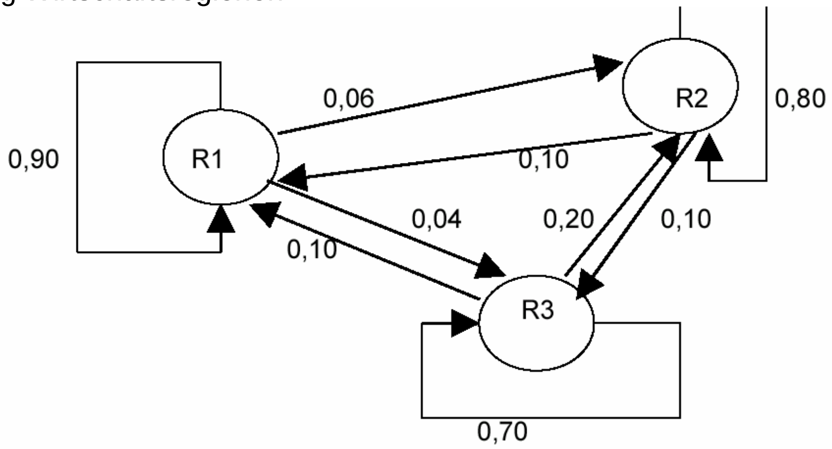
Jahre	0	5	10	20	30	40
Bevölkerung R1	14,400	24,888	28,325	29,820	29,981	29,998

Begründen Sie, wie diese Tabelle entstanden ist, und finden Sie eine geeignete Funktion, die diese Entwicklung beschreibt. Bestimmen Sie möglichst rechnerisch das Jahr, in dem die Bevölkerungszahl von R1 mindestens 29,00 Millionen beträgt! Zeichnen Sie den Graphen!
d) Versuchen Sie herauszufinden, wie sich die Bevölkerung von „XYZ“ entwickeln würde in den ersten drei Jahren, wenn noch ein Wachstum von 3% vorhanden wäre, gemessen an der Bevölkerungszahl des Vorjahres in jeder einzelnen Region!

[3] G. Heitmeyer

Lösung Wirtschaftsregionen

a)

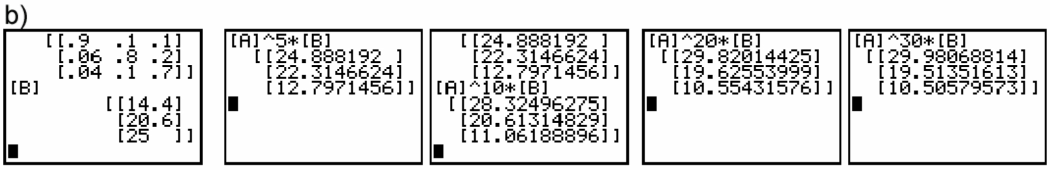


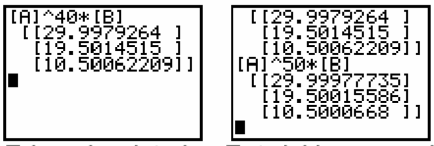
Im ersten Jahr gehen 20,6*0,1 Millionen von R2 nach R1, im 2. Jahr 22,344*0,1, insgesamt 2,06+2,2344=4,2944.

Das 1. Jahr ergibt sich aus der Aufgabenstellung, 22,344 ist die 2. Koordinate von $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 17{,}52 \\ 22{,}344 \\ 20{,}136 \end{pmatrix}$

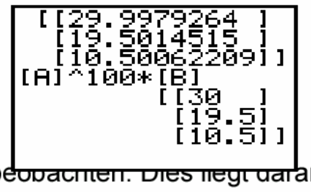
Die Lösung kann auch mit Hilfe eines Baumdiagramms ähnlich wie in der Stochastik gefunden werden!

b)



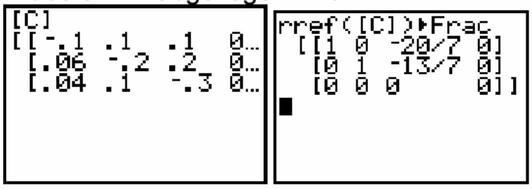


Erkennbar ist eine Entwicklung zum "Grenzvektor" :



Bei anderen Startvektoren ist die gleiche Entwicklung zu beobachten. Dies liegt daran, dass z.B. die Region R1 stabiler gegen Abwanderung ist.Erst bei größerer Bevölkerung in R1 wirken sich die niedrigeren Übergangswahrscheinlichkeiten in den Absolutzahlen aus, bis schließlich Zu- und Abwanderung gleich groß sind.

Die Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ legt die Bedingung für einen Startvektor fest, so dass sich beim Ergebnis nichts mehr ändert. Es ergibt sich ein Gleichungssystem, bei dem in der Hauptdiagonalen gegenüber A überall "1" abgezogen wird!



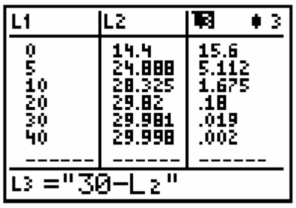
Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $x - \frac{20}{7}t = 0 \wedge y - \frac{13}{7}t = 0 \wedge z = t \wedge x + y + z = 60$

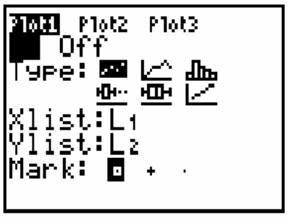
$\Rightarrow \frac{20}{7}t + \frac{13}{7}t + t = 60 \Leftrightarrow 40t = 420 \Leftrightarrow t = 10{,}5$

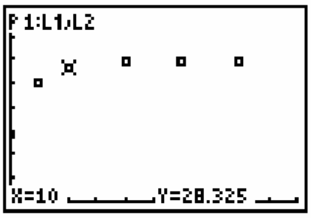
$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 19{,}5 \\ 10{,}5 \end{pmatrix}$

Der Grenzvektor ist also gleich dem Fixvektor, es finden keine Veränderungen mehr statt.

c) Die Bevölkerungszahl in R1 ergibt sich aus den 1. Komponenten der Vektoren $\vec{x}$ aus b).
Darstellung in Listen:



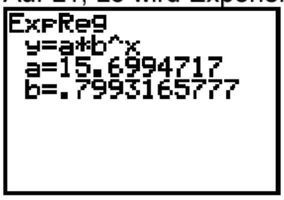


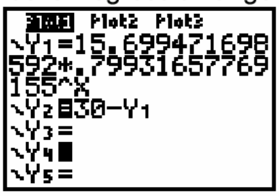


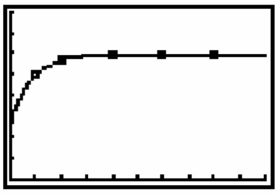
Aus den Werten und der graphischen Darstellung erkennt man, dass der Graph nach oben gekrümmt ist und eine Schranke 30, die sich auch in b) ergibt, eine sinnvolle Angabe ist. Als Ansatz wird also gewählt:

$f(x) = 30 - a \cdot e^{k\,x} \Leftrightarrow a \cdot e^{k\,x} = 30 - f(x)$ (Siehe oben Liste L3!)

Auf L1, L3 wird Exponentielle Regression angewandt.



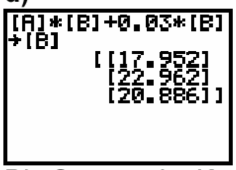


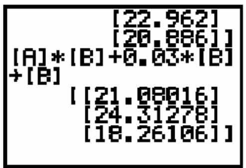


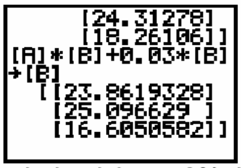

$29 = 30 - a \cdot e^{k\,x} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = e^{k\,x} \Leftrightarrow k \cdot x = \ln\left(\frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1/a)}{k} = 12{,}293...$

Im 13. Jahr werden mehr als 29 Millionen in R1 leben!

d)







Die Summe der Koordinaten im jeweiligen Lösungsvektor erhöht sich um 3%, im 1. Jahr also um 1,8 Millionen!

LA /AG 2

II.2 Insektenpopulation

In den Tropen legen die Weibchen einer bestimmten Insektenpopulation jedes Jahr kurz vor Beginn der Regenzeit ihre Eier und sterben bald darauf. Durchschnittlich kommen dabei auf jedes ausgewachsene Insekt etwa 90 Eier, aus denen wenig später Larven schlüpfen. Der Larvenbestand nimmt von Jahr zu Jahr durch Witterungseinflüsse, aber auch durch den Verzehr durch andere Tiere, ab. Im dritten Jahr verpuppen sich die Larven, und aus einem Teil der Puppen entwickeln sich im folgenden Jahr Insekten, die wieder kurz vor Beginn der Regenzeit für den Fortbestand sorgen. Die jährliche Entwicklung dieser Insektenpopulation wird durch die nebensehende Populationsmatrix A beschrieben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Betrachten Sie zunächst die Populationsmatrix A.

- Stellen Sie das durch A beschriebene Modell mit einem Übergangsgraphen dar.
- Beschreiben Sie die biologische Bedeutung der von Null abweichenden Komponenten der Matrix A. **15 P**

b) Im Weiteren wird die Entwicklung der Insektenpopulation genauer untersucht.

- Berechnen Sie die ersten 10 Potenzen der Populationsmatrix A.
- Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Hinblick auf die Insektenpopulation. **10 P**

Gehen Sie in den folgenden Aufgabenteilen c), d) und e) davon aus, dass sich die Insekten entsprechend dem obigen Modell, d. h. mithilfe der Populationsmatrix A entwickeln.

c) In einem Naturreservat hat man zum Beginn der Untersuchung pro ha Waldfläche den folgenden Bestandsvektor $\overrightarrow{p_0}$ ermittelt:

Alter	Name	Anzahl
0 bis 1 Jahre	Larven 1	9000
1 bis 2 Jahre	Larven 2	3000
2 bis 3 Jahre	Puppen	900
3 bis 4 Jahre	ausgewachsene Insekten	700

- Berechnen Sie den zu erwartenden Bestandsvektor $\overrightarrow{p_1}$ der Insektenpopulationen im Jahr nach dem Beginn der Untersuchung.
- Bestimmen Sie den Bestandsvektor $\overrightarrow{p_{-1}}$ der Insektenpopulation im Jahr vor Beginn der Untersuchung. **15 P**

d) Man spricht von einer Insektenschwemme, wenn mehr als 2000 ausgewachsene Insekten pro ha Waldfläche, bzw. von einem Unterbestand, wenn weniger als 100 ausgewachsene Insekten pro ha Waldfläche vorkommen.
Entscheiden Sie, ob und gegebenenfalls wann es bei langfristig ungestörter Entwicklung der Population

- zu einer Insektenschwemme oder
- zu einem Unterbestand

kommt. **10 P**

e) In einem benachbarten Gebiet ermitteln die Wissenschaftler seit Jahren eine annähernd konstante Anzahl ausgewachsener Insekten pro ha Baumbestand.

- Begründen Sie durch geeignete Rechnung, dass mithilfe der Populationsmatrix A das Auftreten einer stabilen Population erklärt werden kann.
- Ermitteln Sie eine passende Startpopulation für den Fall, dass 250 ausgewachsene Insekten pro ha Baumbestand gezählt wurden. **10 P**

f) Durch Umweltverschmutzung sinkt bei sonst gleich bleibenden Überlebensraten die Anzahl der von den Weibchen gelegten Eier auf durchschnittlich 60 Stück pro ausgewachsenem Insekt. Ermitteln Sie, wie sich diese Veränderung auf die langfristige Entwicklung der Insektenpopulation auswirkt. **10 P**

g) Die untersuchte Insektenpopulation gilt als stark gefährdet, wenn in ihrem Verbreitungsgebiet pro ha Baumbestand dauerhaft weniger als 15 Insekten gezählt werden. Betrachten Sie für diesen Aufgabenteil den Bestandsvektor $\overrightarrow{p_0}$ aus dem Aufgabenteil c) und die Populationsmatrix aus dem Aufgabenteil f)

- Innerhalb eines jeden Zyklus gibt es eine maximale Insektenanzahl.
  Ermitteln Sie eine geeignete Funktion, die diese maximalen Insektenanzahlen beschreibt.
- Bestimmen Sie das erste Jahr, ab welchem die Insektenpopulation in diesem Gebiet zu den gefährdeten Arten gehört. **10 P**

h) Sie haben in den Aufgabenteilen f) und g) festgestellt, dass die durchschnittliche Anzahl der Eier pro ausgewachsenem Insekt bei gleich bleibender Überlebensrate der Larven einen großen Einfluss für die Gesamtentwicklung der Population dieser Insektenart hat.
Ermitteln Sie einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Eier pro ausgewachsenem Insekt und der langfristigen Populationsentwicklung.
Begründen Sie Ihr Ergebnis mithilfe des Modells. **10 P**

i) Die Forscher erkennen, dass die neuen Umweltbedingungen zu weiteren Entwicklungsveränderungen geführt haben. Dieses wird in der Matrix A_{neu} dargestellt.

$$A_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

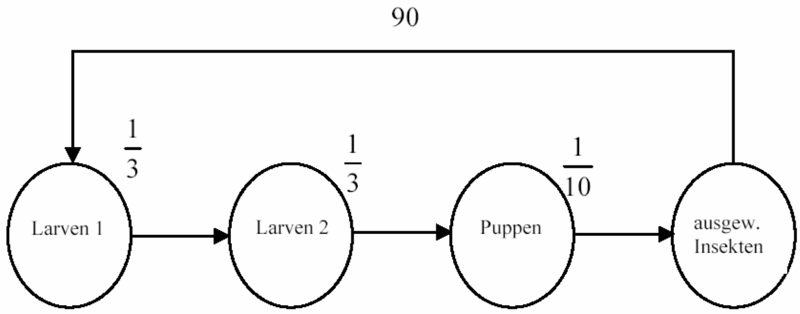
- Interpretieren Sie die im Vergleich zur Matrix A veränderten Werte in A_{neu} im Kontext der Aufgabenstellung.
- Es gibt Vektoren, die in diesem neuen Modell aufgrund des Sachkontextes nicht als Bestandsvektoren vorkommen können. Begründen Sie dies, indem Sie z. B. Vorjahresbestände betrachten. **10 P**

Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport
Abitur 2008

CiMS-Schulen
Haupttermin

Leistungskurs Mathematik

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	 Biologische Bedeutung der Koeffizienten: $a_{13} = 90$ ist die Vermehrungsrate /Geburtenrate $a_{21} = \frac{1}{3}$ ist die Überlebensrate der Larven im 1. Jahr (Larven 1 / Eier) $a_{32} = \frac{1}{3}$ ist die Überlebensrate der Larven im 2. Jahr (Larven 2) $a_{33} = \frac{1}{10}$ ist die Überlebensrate der verpuppten Larven im 3. Jahr (Puppen)	10	5	
b)	Berechnung von A^n mit $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$. Die Matrix A^4 ist identisch mit der Einheitsmatrix E. Also gilt: $A = A^5$ und $A^2 = A^6 \ldots$ usw. Für die Entwicklung der Population bedeutet das, dass sich in einem Zyklus von vier Jahren wieder die Ausgangspopulation einstellt.	5	5	
c)	Bestimmung von $\vec{p}_1$: $\vec{p}_1 = A \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9000 \\ 3000 \\ 900 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63000 \\ 3000 \\ 1000 \\ 90 \end{pmatrix}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Bestimmung von $\vec{p}_{-1}$: Z. B. aus dem Ansatz $\vec{p}_0 = A \cdot \vec{p}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9000 \\ 3000 \\ 900 \\ 700 \end{pmatrix}$ erhält man z. B. mithilfe des solve-Befehls $x_1 = 9000,\ x_2 = 2700,\ x_3 = 7000,\ x_4 = 100\ \ und\ \ \vec{p}_{-1} = \begin{pmatrix} 9000 \\ 2700 \\ 7000 \\ 100 \end{pmatrix}$. Ein weiterer Ansatz ergibt sich z. B. mithilfe der inversen Matrix: $\vec{p}_{-1} = A^{-1} \cdot \vec{p}_0$ oder aus der Zykluseigenschaft.	10	5	
d)	Die Lösung erhält man durch Rückgriff auf b) oder durch Bestimmung der der Vektoren $\vec{p}_1$ bis $\vec{p}_3$ danach wiederholen sich die Ergebnisse. $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 9000 \\ 3000 \\ 900 \\ 700 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 63000 \\ 3000 \\ 1000 \\ 90 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 8100 \\ 21000 \\ 1000 \\ 100 \end{pmatrix}$ und $\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 9000 \\ 2700 \\ 7000 \\ 100 \end{pmatrix}$, Es tritt keine Insektenschwemme auf, da nie mehr als 700 (ausgewachsene) Insekten auftreten. Ein Unterbestand tritt im 1. Jahr nach Untersuchungsbeginn auf, also auch im 5. Jahr usw. Bei einer ungestörten Entwicklung treten alle 4 Jahre Unterbestände auf, d. h. in den Jahren $1 + 4 \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}^{0}$.		10	
e)	Die Aufgabenstellung führt zum folgenden LGS: $A \cdot \vec{p}_x = \vec{p}_x$, d. h. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Die Lösung z. B. mit dem solve-Befehl ergibt eine parameterabhängige Lösung. Die könnte z. B. folgendermaßen aussehen: $x_1 = 90x_4,\ x_2 = 30x_4,\ x_3 = 10x_4,\ x_4 \in \mathbb{N}^*$.			

	Lösungsskizze	I	II	III
	Mit diesem Modell ist also eine stabile Population möglich. Setzt man in $\vec{p}_x = \begin{pmatrix} 90x_4 \\ 30x_4 \\ 10x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$ die x_4-Komponente gleich 250, so erhält man $\vec{p}_x = \begin{pmatrix} 22500 \\ 7500 \\ 2500 \\ 250 \end{pmatrix}$ Dieses ist die gesuchte Startpopulation für einen stabilen Zustand mit 250 Insekten.			10
f)	Mit den neuen Bedingungen erhält man die neue Populationsmatrix $A_U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 60 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$ Nun werden wieder (wie im Aufgabenteil b)) die Potenzen der Populationsmatrix untersucht. Berechnungen ergeben, dass $A_U{}^4 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix $A_U{}^4$ ist identisch mit der um $\frac{2}{3}$ „vervielfachten“ Einheitsmatrix E. Die Insektenpopulation wird nach jeweils vier Jahren auf $\frac{2}{3}$ des Bestandes ihres vorherigen Bestanden sinken. Sie stirbt langfristig aus. Auch eine Betrachtung mithilfe des Anfangsbestandes $\vec{p}_0$ ist möglich.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$A_x^{4z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}^{4z} = \left(\begin{pmatrix} \frac{x}{90} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{90} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{90} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x}{90} \end{pmatrix}\right)^{z} = \left(\frac{x}{90}\right)^{z} \cdot E$		5	5
i)	Interpretation: • Die durchschnittliche Eiablage ist von 90 auf 45 Eier pro Käfer gesunken. • Ein Teil, genauer $\frac{1}{12}$ der Larven auf Stufe 1 geht bereits nach dem ersten Jahr ins Puppenstadium über, $\frac{1}{4}$ der Larven auf Stufe 1 geht in die Larvenstufe 2 über. Da $\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$, bleibt die Überlebensrate der Larven auf Stufe 1 gleich. • Die restliche Entwicklung verläuft normal. Die Ermittlung von $\vec{p}_{(a_0)-1}$ aus einer beliebigen Anfangspopulation $\vec{p}_{a_0}$ führt zu dem Ansatz $\vec{p}_{a_0} = A_{neu} \cdot \vec{p}_{(a_0)-1}$: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45x_4 \\ \frac{1}{4}x_1 \\ \frac{1}{12}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{10}x_3 \end{pmatrix}$ Als Lösung ergibt sich: $x_1 = 4a_2,\ x_2 = 3a_3 - a_2,\ x_3 = 10a_4,\ x_4 = \frac{1}{45}a_1$ mit $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0 \wedge x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$. Aus $x_2 = 3a_3 - a_2$ ist unmittelbar zu erkennen, dass für die Fälle $a_2 > 3a_3$ die Nichtnegativitätsbedingung für die Anzahl der zweijährigen Larven nicht mehr gegeben ist. Also lässt sich für alle Vektoren, in denen die Anzahl der zweijährigen Larven mehr als dreimal so hoch ist wie die der Puppen, keine Vorjahrespopulation ermitteln, d. h., diese Vektoren treten in der Population als Bestandsvektoren nicht auf.		5	5
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25