Zentralabitur 2011 Schwerpunkt Lineare Algebra

Marienschule Hildesheim, 24.2.2010

Andreas Dierks, Siegfried Weiß

Themen

1. Vorgaben zum Abitur 2011
2. Matrizen bei linearen Gleichungssystemen (ref, rref)
3. Materialverflechtung

Mittagspause

4. mehrstufige Prozesse
5. Abschlussgespräch

2

Grundlagen für das Abitur

1. Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen
2. Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum (Parametergleichungen genügen)

3

Vertiefungen

gA: Matrizen im Anwendungsbezug

Materialverflechtung (Verflechtungsdiagramm, Verflechtungsmatrizen)

eA: Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen

Populationsentwicklung, Käufer und Wahlverhalten, zyklisches und stationäres Verhalten

4

GTR, CAS

„müssen […] eine angemessene Möglichkeit zur Ermittlung der Lösungsmenge nicht eindeutig lösbarer LGS auch mit mehr als drei Variablen bieten."

▶ ref und rref

5

Gaußsches Eliminationsverfahren

Das Unternehmen nutzt für die Kostenberechnung ein Gleichungssystem, das für einen Teil der variablen Kosten den Parameter t berücksichtigt. Die zugehörigen Variablen stellen die Faktoreinsatzmengen der Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 dar.

Bei der Lösung des Gleichungssystems ergibt sich nach Anwendung des Gauß-Algorithmus die folgende Matrix:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & t & -3t \\ 0 & 0 & -t & -t \end{array}\right).$$

Berechnen Sie eine konkrete Lösung in Abhängigkeit vom Parameter t mit $t \in IR$ und $t \neq 0$.

Zentralabitur 2008, Nachschreibtermin, gA
Fachgymnasium Wirtschaft

6

2. Matrizen bei linearen Gleichungssystemen

Beispiel: Schnitt zweier Geraden

$$g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\quad \text{und}\quad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$$

Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$t\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-5\\-1\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix}0t-2s=-1\\2t-4s=-5\\2t+0s=-1\end{matrix}\right| \qquad \begin{pmatrix}0&-2&-1\\2&-4&-5\\2&0&-1\end{pmatrix}$$

Gaußsches Eliminationsverfahren

$$\begin{array}{c}\begin{matrix}t & s & \end{matrix}\\ \begin{pmatrix}0&-2&-1\\2&-4&-5\\2&0&-1\end{pmatrix}\end{array}\quad \begin{pmatrix}1&-2&-2{,}5\\0&-2&-1\\0&4&4\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&-2&-2{,}5\\0&1&0{,}5\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&-2{,}5\\0&-2&-1\\2&0&-1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&-2&-2{,}5\\0&1&0{,}5\\0&4&4\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&-2&-2{,}5\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ref – row echelon form

$$\begin{pmatrix}1&-2&-2{,}5\\0&1&0{,}5\\0&0&2\end{pmatrix}$$

rref – reduced row echelon form

$$\begin{array}{c}\begin{matrix}t & s & \phantom{-2{,}5}\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1&-2&-2{,}5\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&-2{,}5\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Übung

Entwickeln Sie typische Aufgaben der Analytischen Geometrie, die sich mit Hilfe von Gleichungssystemen lösen lassen.

Untersuchen Sie: Wie wirken sich besondere Lagebeziehungen auf die Diagonalform der Koeffizientenmatrix aus?

alternative Übung

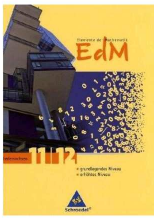
- Lage g zu E_1 und zu E_2
- Schnittgerade von E_1 und E_2

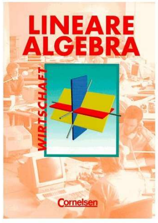
$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\8\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$E_1:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\quad E_2:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

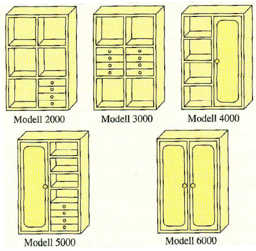
3. Materialverflechtung

Literatur:





Eine „Modellmatrix“



	Modell				
	2000	3000	4000	5000	6000
Korpus	1	1	1	1	1
Türen	0	0	1	1	2
Einlegeböden	3	0	3	3	6
Schubladensätze	1	2	0	1	0

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Modell-matrix

Matrix mal Vektor

$$\begin{array}{l} \\ \text{Korpus} \\ \text{Türen} \\ \text{Böden} \\ \text{Schubladen} \end{array} \mathbf{A} = \overset{\text{Modelle}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ein Auftrag:

Modell 2000: 20 Stück
Modell 3000: 25 Stück
Modell 4000: 40 Stück
Modell 5000: 50 Stück
Modell 6000: 70 Stück

Bestellvektor

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 40 \\ 50 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 40 \\ 50 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Matrix mal Vektor

$$\begin{array}{l} \\ \text{Korpus} \\ \text{Türen} \\ \text{Böden} \\ \text{Schubladen} \end{array} \mathbf{A} = \overset{\text{Modelle}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ein Auftrag:

Modell 2000: 20 Stück
Modell 3000: 25 Stück
Modell 4000: 40 Stück
Modell 5000: 50 Stück
Modell 6000: 70 Stück

Bestellvektor

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 40 \\ 50 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 40 \\ 50 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 205 \\ 230 \\ 750 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Aufträge:

	Kunde X	Kunde Y	Kunde Z
Modell 2000	10	30	25
Modell 3000	15	40	25
Modell 4000	40	20	50
Modell 5000	40	10	40
Modell 6000	50	10	30

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 10 & 30 & 25 \\ 15 & 40 & 25 \\ 40 & 20 & 50 \\ 40 & 10 & 40 \\ 50 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Aufträge:

	Kunde X	Kunde Y	Kunde Z
Modell 2000	10	30	25
Modell 3000	15	40	25
Modell 4000	40	20	50
Modell 5000	40	10	40
Modell 6000	50	10	30

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 10 & 30 & 25 \\ 15 & 40 & 25 \\ 40 & 20 & 50 \\ 40 & 10 & 40 \\ 50 & 10 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 155 & 110 & 170 \\ 180 & 50 & 150 \\ 570 & 240 & 525 \\ 80 & 120 & 115 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

Matrix B:

		Kunde		
		X	Y	Z
Modell	2000	10	30	25
	3000	15	40	25
	4000	40	20	50
	5000	40	10	40
	6000	50	10	30

Matrix A:

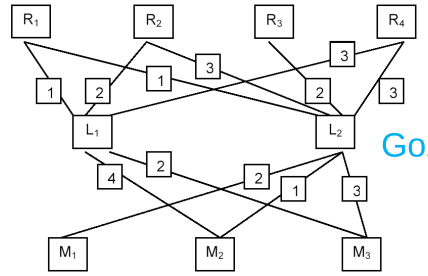
	2000	3000	4000	5000	6000
Korpus	1	1	1	1	1
Türen	0	0	1	1	2
Einlegeböden	3	0	3	3	6
Schubladensätze	1	2	0	1	0

→ Matrix C:

155	110	170
180	50	150
570	240	525
80	120	115

Skalarprodukt der 2. Zeile von A mit der 3. Spalte von B

Materialverflechtung



Erstellen Sie zuerst die Rohstoff-Endprodukt-Matrix.

Gozintograph

Zentralabitur 2007, Gk
Fachgymnasium Wirtschaft

2 alternative Schreibweisen

	Modell				
	2000	3000	4000	5000	6000
Korpus	1	1	1	1	1
Türen	0	0	1	1	2
Einlegeböden	3	0	3	3	6
Schubladensätze	1	2	0	1	0

Output

Input

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

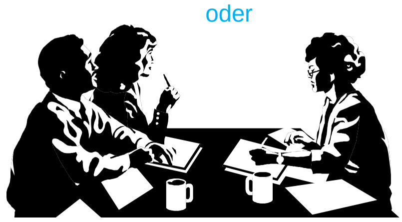
Modell-matrix

$$C = A \cdot B \Leftrightarrow C^T = B^T \cdot A^T$$

und jetzt?

Pause?

oder



Arbeit an Aufgaben?

Übungen

- Seite 15 Zentralabi 2006, Gk
- Seite 17 Zentralabitur 2008, eA
- Seite 19 Zentralabitur 2006, Lk

Inverse Matrix

Ein Hersteller von Düngemitteln produziert aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3. Diese werden zu den Endprodukten E_1, E_2 und E_3 verarbeitet.
Der mehrstufige Produktionsprozess kann wie folgt dargestellt werden:

B=

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	1
Z_2	3	4	3
Z_3	1	0	2

C=

	E_1	E_2	E_3
R_1	11	9	13
R_2	33	28	36
R_3	15	17	15

Zentralabitur 2008, eA, Fachgymnasium,Wirtschaft

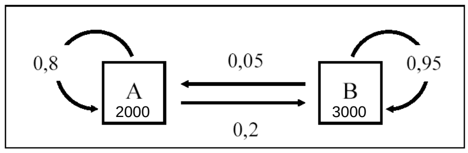
$$A \cdot B = C$$
$$A \cdot B \cdot B^{-1} = C \cdot B^{-1}$$
$$A = C \cdot B^{-1}$$

4. mehrstufige Prozesse

Literatur:

25

Käuferwanderung



26

stationäres Verhalten

$$\vec{v}_1 = M \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1750 \\ 3250 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = M \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}65 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = M \cdot \vec{v}_1 \approx \begin{pmatrix} 0{,}31 \\ 0{,}69 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = M^3 \cdot \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} 0{,}28 \\ 0{,}74 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{20} = M^{20} \cdot \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{25} = M^{25} \cdot \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$$

27

Bestimmung der Grenzverteilung

Betrachtung von Potenzen der Übergangsmatrix

$$\vec{v}_{gr} = A^n \bullet \vec{v}_0$$

Grenzmatrix

$$G = A^n$$

Berechnung des Fixvektors

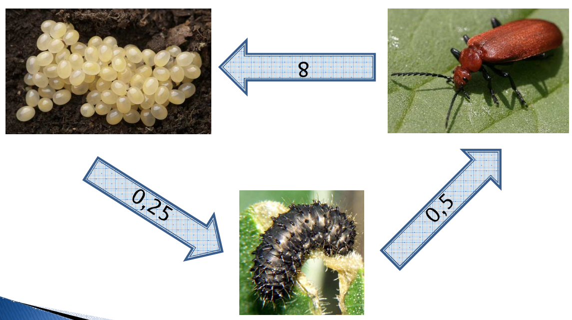
$$A \cdot \vec{v}_{gr} = \vec{v}_{gr}$$

$$A \cdot \vec{v}_{gr} - 1 \cdot \vec{v}_{gr} = 0$$

$$(A - E) \cdot \vec{v}_{gr} = 0$$

28

Entwicklung einer Population



29

Übungen

- Seite 21 Entwicklung einer Mäusepopulation
- Seite 22 Wetterentwicklung
- Seite 23 Diskothekenbesucher (Abiaufgabe aus Bremen)
- …

30

Ihre Fragen, Anmerkungen, Anregungen!

31

Vielen Dank für Ihre/Eure Aufmerksamkeit und Mitarbeit!

www.andreasdierks.de

dierks@web.de,
siegfried.weiss@gmx.de

32

33